

LA PARADOJA DE YABLO

Lavinia Picollo

UBA – CONICET

Con el objetivo de mostrar que lo que se encuentra a la base de las paradojas y otras patologías que rodean al predicado veritativo (como la paradoja del mentiroso) no es la circularidad o la autorreferencia sino la infundación, S. Yablo (1985, 1993) presenta lo que hoy se conoce como ‘paradoja de Yablo’, aunque él la llamó ‘ ω mentiroso’: una lista infinita de oraciones —una secuencia de oraciones de longitud ω — cada una de las cuales afirma que ninguna de las que se encuentran después de ella en la lista es verdadera. De acuerdo con Yablo, esta secuencia constituye un ejemplo de antinomia no circular de la familia del mentiroso. No todos han concordado con Yablo y la secuencia dio lugar a un amplio debate centrado en el presunto carácter no circular de la lista, pero que también ha puesto en duda su paradojicidad e incluso su semejanza con la paradoja del mentiroso.

Este artículo comprende una presentación detallada de la antinomia, junto con un breve desarrollo del extenso debate que se ha sostenido a su alrededor durante los últimos veinte años. En §1 introducimos la paradoja en el marco de su íntima relación y diferencias con el mentiroso y otras paradojas semánticas de la misma familia. En §2 proveemos un análisis formal de la lista de Yablo y de la derivación de una contradicción a partir de ella. En §3 se pone en evidencia el elemento conflictivo involucrado en la paradoja que originará el debate: el uso de un predicado autorreferencial. §4 presenta un estudio del argumento original de Yablo que lleva a una contradicción, a partir de lo indicado en §3. Siendo que los resultados de este análisis son adversos a los propósitos de Yablo, §5 consiste en una recopilación de intentos, algunos más exitosos que otros, de sortear las dificultades. En §6 se menciona la posibilidad de obtener versiones infinitarias de antinomias no semánticas.

§ 1. Introducción

Mientras que la paradoja del mentiroso está dada por una única oración que dice de sí misma que no es verdadera,¹ y otras antinomias de la familia consisten de *loops* de oraciones, como la paradoja de la postal:

- (P₁) P₂ es verdadera.
- (P₂) P₁ no es verdadera.

en donde las expresiones involucradas dicen de sí mismas que no son verdaderas a través de las otras, indirectamente, la paradoja de Yablo está dada por una secuencia infinita de

¹ Estrictamente hablando, la oración original del mentiroso predica falsedad de sí misma. La oración a la cual hacemos referencia aquí suele llamarse ‘mentiroso reforzado’.

oraciones, ninguna de las cuales refiere a sí misma o a expresiones que se encuentran por encima de ella, sino que todas afirman sólo que aquellas que están por debajo en la lista no son verdaderas. Como indica R. Sorensen (1998, p. 139, mi traducción), “La técnica sustituye la estrecha circularidad propia de la autorreferencia por la exuberante linealidad de una serie infinita”:

- (S₀) Para todo $x > 0$, S_x no es verdadera.
- (S₁) Para todo $x > 1$, S_x no es verdadera.
- (S₂) Para todo $x > 2$, S_x no es verdadera.

...

Prima facie, no es posible asignar valores de verdad *clásicos* (verdadero o falso) consistentemente a las oraciones de esta lista. Supongamos que alguna de ellas, S_n, es verdadera. Luego, ninguna cuyo subíndice sea mayor a n lo es, *i.e.*, S_{n+1} no es verdadera y tampoco lo son aquellas que se encuentran por debajo de S_{n+1}. Pero esto último es precisamente lo que S_{n+1} afirma, razón por la cual ésta debería ser verdadera después de todo. Dado que suponer que una oración cualquiera es verdadera nos ha llevado a una contradicción, debemos concluir que ninguna lo es. Pero si ninguna oración debajo de S₀ es verdadera, S₀ debe ser a la vez verdadera, lo cual es imposible.

De acuerdo con S. Yablo (1993, p. 251, mi traducción), la lista da lugar a una paradoja “en total ausencia de autoreferencia”, contradiciendo la opinión generalizada hasta el momento, según la cual la autorreferencia² es esencial a toda antinomia semántica. Sobre esta premisa estaban fundadas teorías de conjuntos como la de B. Russell & N. Whitehead (1910) y teorías de la verdad como la de A. Tarski (1944), que es quizás la más afectada aquí.

Tarski propone sortear las paradojas semánticas mediante una distinción entre lenguaje y metalenguaje, donde ‘verdad’ es siempre ‘verdad en el lenguaje objeto’ y sólo puede ser aplicada desde un metalenguaje esencialmente más rico. En lugar de un único predicado veritativo para un único lenguaje, obtenemos una jerarquía de predicados y lenguajes tales que el predicado de verdad de cada lenguaje se encuentra en los lenguajes que están por encima en la jerarquía. Esto bloquea la paradoja del mentiroso y otros *loops* pero no es suficiente para bloquear la paradoja de Yablo, pues, como afirma S. Kripke (1975, p. 697, mi traducción), “no es en ningún sentido evidente que el abordaje ortodoxo garantice buena fundación [...] los teoremas usuales nos permiten fácilmente construir una cadena descendiente de lenguajes de primer orden $L_0, L_1, L_2, \dots$ tales que L_n contiene un predicado de verdad para L_{n+1} ”. Siendo esta jerarquía acumulativa — $L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \dots$ — siguiendo a T.

² Las paradojas no semánticas pueden exhibir otros tipos de circularidad, *v.g.*, la paradoja de Russell, en donde conjuntos circulares —en lugar de expresiones autorreferenciales— juegan un rol central.

Forster (2004) podemos formular una lista semejante a la de Yablo: en cada L_n hay una oración S_n que afirma que ninguna oración S_m donde $m > n$ es verdadera, y es posible obtener una contradicción por un argumento análogo al anterior. En palabras de S. Yablo (2004, p. 141, mi traducción), “el modo tarskiano de evitar paradojas yace en algo más que en una distinción rígida entre lenguaje objeto y metalenguaje. Es preciso también que la secuencia de lenguajes esté eventualmente fundada en un lenguaje objeto base”.

§ 2. Un análisis formal

Dada la importancia de las consecuencias de una paradoja semántica no circular, poco tiempo después de su aparición la paradoja de Yablo fue puesta bajo un minucioso escudriño. El primer paso fue su formalización en una extensión del lenguaje de la aritmética de primer orden, como es usual en el caso de antinomias semánticas y más aún en el caso de la secuencia de Yablo, donde hay vocabulario aritmético involucrado. Sea L el lenguaje de la aritmética con los símbolos de función que necesitaremos luego y sea L_T el resultado de incorporar a L un predicado monádico Tr para la verdad.³ La lista de Yablo puede ser formalizada en L_T mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} s(0) &= \langle \forall x > 0 \neg Tr(s(x)) \rangle \\ s(1) &= \langle \forall x > 1 \neg Tr(s(x)) \rangle \\ s(2) &= \langle \forall x > 2 \neg Tr(s(x)) \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

donde $s(x)$ representa la ‘función de Yablo’, como lo hace S_x en el lenguaje semi-formal de la presentación original. ¿Cómo lograr que cada oración en la secuencia afirme que las *infinitas* expresiones que le siguen no son verdaderas en lenguajes finitarios como el español y L_T , donde las conjunciones infinitas como ‘ S_1 no es verdadera y S_2 no es verdadera y ...’ no forman parte del lenguaje? La respuesta obvia es mediante el cuantificador universal, como hace Yablo. Ahora bien, para poder cuantificar sobre los subíndices, precisamos de un término S_x con una variable libre x tal que, para cada n , S_n (el resultado de reemplazar x por n en S_x) sea un nombre de ‘Para todo $x > n$, S_x no es verdadera’. En L_T un término con una variable libre es un símbolo de función, en nuestro caso $s(x)$. Via códigos de Gödel, cada $s(\underline{n})$ funciona como un nombre para la n -ésima oración de la lista. Como señala G. Priest (1997), los subíndices en la presentación original encubren la presencia de esta función.

³ Si n es un número natural, $\underline{n}$ es su numeral. Dada una expresión $\mathbf{A}$ de L_T , $\langle \mathbf{A} \rangle$ es el numeral del número de Gödel de $\mathbf{A}$. El símbolo ternario de función $x(y/z)$ representa la función que sustituye en la fórmula cuyo código es $\mathbf{x}$ el término codificado por $\mathbf{z}$ por aquel codificado por $\mathbf{y}$, mientras que $\text{num}(x)$ representa la función que asigna a cada número el código de su numeral. Ambas funciones son recursivas primitivas. Si y es la única variable libre en $\mathbf{A}$, escribimos $\langle \mathbf{A}(\text{num}(x)) \rangle$ en lugar de $\langle \mathbf{A}(x) \rangle(\text{num}(x)/\langle y \rangle)$ cuando no dé lugar a confusión.

Dada esta formalización, el argumento de Yablo en un sistema de deducción natural resulta ser el siguiente:

1.	$Tr(s(n))$	supuesto
2.	$\forall x > n \neg Tr(s(x))$	1
3.	$\neg Tr(s(n+1))$	2
4.	$\forall x > n+1 \neg Tr(s(x))$	2
5.	$Tr(s(n+1))$	4
6.	$\perp$	3, 5
7.	$\neg Tr(s(n))$	1-6
8.	$\forall x \neg Tr(s(x))$	7
9.	$\forall x > 0 \neg Tr(s(x))$	8
10.	$Tr(s(0))$	9
11.	$\neg Tr(s(0))$	8

Si bien todo parece estar en orden a primera vista, una mirada más de cerca muestra ciertas dificultades.

§ 3. La existencia de la lista de Yablo en primer orden

[Yablo] nos pide que imaginemos cierta secuencia. ¿Cómo se puede estar segura de que existe una secuencia tal? (Podemos imaginar todo tipo de cosas que no existen.) (G. Priest (1997, p. 238, mi traducción))

¿Cómo fijar la referencia de ‘la secuencia de Yablo’? Siendo infinita, no podemos escribir una a una todas las expresiones que la conforman. ¿Cómo sabemos cuáles son? Los puntos suspensivos en la presentación original apuntan, como indica Priest, a que podemos identificar las oraciones y aprehender la lista porque contamos con una *descripción* finita. Todas comparten la misma forma, son todas instancias de un mismo predicado, *i.e.*, “Para todo $x > y$, S_x es falsa” o, en el plano formal, $\forall x > y \neg Tr(s(x))$, que llamamos ‘predicado de Yablo’. Ahora bien, éste no es cualquier predicado sino que está definido en términos de la función representada por s , la cual debe satisfacer las identidades $s(\underline{n}) = \langle \forall x > \underline{n} \neg Tr(s(x)) \rangle$ para cada $n \in \omega$, esto es, debe a la vez de alguna manera denotar el predicado de Yablo. ¿Cómo sabemos de la existencia de tal función y, por tanto, de tal predicado? De acuerdo con Priest, el predicado de Yablo en el lenguaje natural es “ningún número mayor a x satisface *este* predicado”, y su existencia queda garantizada por el pronombre demostrativo italizado. En L_T su existencia está dada por el lema de diagonalización (fuerte).⁴ Lo que J.

⁴ Mientras que el lema de diagonalización a secas implica la existencia de una *fórmula* $A(x_1, \dots, x_{n-1})$ para cada fórmula $B(x_1, \dots, x_n)$ tal que $A(x_1, \dots, x_{n-1})$ y $B(x_1, \dots, x_{n-1}, A(x_1, \dots, x_{n-1}))$ son *equivalentes*, el lema de diagonalización fuerte implica la existencia de un *término* t para cada fórmula $B(x_1, \dots, x_n)$ tal que lo que t denota y el código de $B(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ son *idénticos*. A fines matemáticos, podríamos utilizar cualquiera de

Ketland (2004) ha llamado ‘Principio Uniforme de Punto Fijo de Yablo’ (PUPFY) es una consecuencia directa de este lema en PAT, la aritmética de Peano formulada en L_T .⁵

$$(PUPFY) \quad \forall y(s(y) = \langle \forall x > \text{num}(y) \neg Tr(s(x)) \rangle)$$

La analogía entre el predicado de Yablo y el mentiroso (*Esta oración no es verdadera*) es inmediata. En el lenguaje natural ambos refieren a sí mismos mediante un pronombre demostrativo ‘esta’ o ‘este’, mientras que en L_T ambos se obtienen mediante el lema de diagonalización: el mentiroso está dado por $t = \langle \neg Tr(t) \rangle$ y el predicado de Yablo por el PUPFY. En los dos casos, el predicado de Yablo (denotado por s) y la oración del mentiroso (denotada por t) aparecen a ambos lados del símbolo de identidad (del lado izquierdo, siendo utilizados, del derecho mencionados) y son, por ende, puntos fijos. Esto es lo que aquí codifica la *autorreferencia*.

¿Significa esto que la paradoja de Yablo es circular? Naturalmente, si como en el caso del mentiroso recurrimos a una instancia de diagonalización como el PUPFY para obtener una contradicción, la antinomia sería tan circular como aquella. Ahora bien, el PUPFY sólo sirve *prima facie* para garantizar la existencia de la lista; no juega ningún rol en la inferencia. Sin embargo, una mirada cautelosa podría revelar lo contrario.

§ 4. Entre la ω -inconsistencia y la llana autorreferencialidad

Atendiendo al paso 1 de la derivación, ¿es n una variable libre o un término cerrado que denota un número en particular? Siendo que en 8 hemos introducido un cuantificador universal sobre ella, debería ser una variable libre, como afirman G. Priest (1997) y J. Ketland (2004, 2005). Pero en este caso, ¿cómo justificamos los pasajes de 1 a 2 y de 4 a 5? Ninguno de ellos se sigue de ninguna de las identidades que conforman la lista —junto con el esquema T—. Lo que está operando allí no es ninguna instancia particular sino un principio general, una combinación del PUPFY con el ‘Principio Uniforme Desentrecomillador de Yablo’, el Esquema-T en su versión uniforme sólo para el predicado de Yablo:⁶

$$(PUDY) \quad \forall y(Tr(\langle \forall x > \text{num}(y) \neg Tr(s(x)) \rangle) \equiv \forall x > y \neg Tr(s(x)))$$

las dos versiones del lema para obtener la lista de Yablo. Sin embargo, se evitan diversos inconvenientes en la discusión filosófica en torno a la circularidad de la lista si en lugar de equivalencias obtenemos identidades. Para detalles sobre este punto, véase L. Picollo (2012).

⁵ Diagonalizando sobre el predicado binario $\forall x > y \neg Tr(z(\text{num}(x)/\langle y \rangle))$, obtenemos un término t tal que $t = \langle \forall x > y \neg Tr(t(\text{num}(x)/\langle y \rangle)) \rangle$. Luego, aplicando sustitución a ambos lados de la identidad tenemos que $t(\text{num}(y)/\langle y \rangle) = \langle \forall x > y \neg Tr(t(\text{num}(x)/\langle y \rangle))(\text{num}(y)/\langle y \rangle) \rangle$. Si z es una variable de individuo cualquiera, sea $s(z) = t(\text{num}(z)/\langle y \rangle)$. Luego, $s(y) = \langle \forall x > \text{num}(y) \neg Tr(s(x)) \rangle$.

⁶ Para más detalles sobre este punto véase J. Ketland (2005).

La paradoja de Yablo es autorreferencial después de todo, prácticamente en el mismo sentido en el cual el mentiroso lo es, al menos bajo esta interpretación de n .

¿Qué sucedería si en el primer paso de la derivación n fuera un término cerrado que denota un número particular en lugar de una variable libre? Las inferencias de 1 a 2 y de 4 a 5 quedarían justificadas meramente por las identidades que conforman la lista junto con el Esquema-T para oraciones de Yablo, bautizado por J. Ketland (2004) como ‘Principio Desentrecomillador Local de Yablo’:

$$(PDLY) \quad Tr(\forall x > \underline{n} \neg Tr(s(x))) \equiv \forall x > \underline{n} \neg Tr(s(x))$$

para cada $n \in \omega$. No habría necesidad de recurrir al PUPFY ni a una versión uniforme del Esquema-T. No obstante, la lógica de primer orden no permitiría la inferencia al paso 8, la introducción del cuantificador universal. En efecto, J. Hardy (1996) y J. Ketland (2005) han probado que la teoría dada por PAT + PDLY es *consistente*. Ésta es una consecuencia inmediata de la compacidad de la lógica de primer orden. Dado que ningún subconjunto finito de oraciones de Yablo es inconsistente por sí mismo, la secuencia completa tampoco lo es.⁷

Si bien PAT + PDLY no es inconsistente, Hardy notó que es ω -inconsistente.⁸ Los pasos 1 a 7 de la derivación original constituyen un esquema de prueba de $\neg Tr(s(\underline{n}))$ para cada $n \in \omega$ (aunque a partir de ello no podemos concluir que $\forall x \neg Tr(s(x))$). Luego, sabemos que $\neg Tr(s(0))$, y dado el PDLY y la primera identidad de la lista de Yablo, que $\neg \forall x > 0 \neg Tr(s(x))$, y por tanto, $\neg \forall x \neg Tr(s(x))$. Esto establece la ω -inconsistencia de PAT + PDLY, *i.e.*, de la lista de Yablo (sin el PUPFY).⁹ Bajo esta interpretación de n en la derivación, J. Ketland (2004, p. 165, mi traducción) concluye que “La paradoja de Yablo no es una paradoja genuina. Es más bien una ‘ ω -paradoja”.

§ 5. La búsqueda de una alternativa

Parece que el objetivo de Yablo es imposible. Si optamos por interpretar a n en la derivación como una variable libre la paradoja resulta circular, mientras que si consideramos a n como un término que denota un número dado la lista no es paradójica. G. Priest (1997, §3) considera la posibilidad de que lo que esté operando detrás de la justificación del paso 8

⁷ En lugar de recurrir a compacidad, J. Ketland (2005) prueba la consistencia de PAT + PDLY mostrando que todo modelo *no estándar* de PA es extensible a un modelo de PAT + PDLY. En otras palabras, Ketland prueba la conservatividad semántica de PAT + PDLY sobre PA.

⁸ Una teoría Th de primer orden formulada en una extensión de L es ω -inconsistente si existe una fórmula $A(x)$ con una variable libre x tal que $Th \vdash \neg \forall x A(x)$ y, a la vez, $Th \vdash A(\underline{n})$ para todo $n \in \omega$.

⁹ De acuerdo con Hardy (1996), que la lista de Yablo sea sólo ω -inconsistente (y no inconsistente) la aleja de la familia del mentiroso. R. Sorensen (1998) responde con un ejemplo ‘puente’, una lista de oraciones $M_0, M_1, M_2, \dots$ ω -inconsistente y esencialmente autorreferencial: M_0 afirma que alguna de las oraciones de la lista es falsa, mientras que todas las M_n donde $n > 0$ afirman que n es igual a n . Ésta es en cualquier caso una discusión nominal sobre qué significa pertenecer a la familia del mentiroso.

de la derivación sea la regla ω .¹⁰ Cerrando PAT + PDLY bajo esta regla obtendríamos una contradicción (pues tendríamos tanto $\neg\forall x\neg Tr(s(x))$ como $\forall x\neg Tr(s(x))$)¹¹ y, de ser la regla lo suficientemente plausible, una paradoja *genuina* aparentemente no circular. No obstante, Priest descarta rápidamente esta posibilidad. En sus propias palabras:

Ningún razonador finito aplica jamás realmente la regla ω . El único modo que tienen de saber que hay una prueba de cada $A(n)$ es porque tienen un método uniforme de construir estas pruebas. Y es esta información finita la que fundamenta la conclusión $\forall xA(x)$. (G. Priest (1997, p. 239, mi traducción))

Concediendo que los seres humanos somos razonadores finitos,¹² ¿qué sucedería con un razonador infinito como Zeus, por ejemplo? De saber que la lista de Yablo es paradójica para este ser infinito, sabemos que es paradójica *simpliciter*. Otro modo de verlo sin recurrir a razonadores infinitos es optar por una noción semántica de paradojicidad —la imposibilidad de asignar valores de verdad clásicos consistentemente a las oraciones de la lista— como hemos hecho ya en la introducción, en lugar de la proveniente de la teoría prueba —la derivación de una inconsistencia—. Mientras que en la lógica de primer orden ambas nociones coinciden, en segundo orden (con semántica estándar)¹³ divergen: en la aritmética de segundo orden — PA_2 — la regla ω es semánticamente válida pero no forma parte del cálculo. Esto se debe a la categoricidad de PA_2 , esto es, a que no tiene modelos no estándar. Formulada en una versión de segundo orden de L_T , la lista de Yablo resulta paradójica en términos semánticos, sin necesidad de *aplicar* la regla ω .¹⁴ Muchos han puesto en duda que la lógica de segundo orden con semántica estándar sea realmente una lógica y el debate, demasiado extenso para exponerlo aquí, no ha concluido aún.

No obstante, de acuerdo con G. Priest (1997), aún si fuera posible aplicar una regla infinitaria (o recurrir a su validez semántica), la paradoja que obtendríamos seguiría siendo circular, pues “la circularidad no tiene nada que ver con el *argumento* en sí mismo; surge en la *estructura* de la situación” (G. Priest (1997, p. 239, sus itálicas, mi traducción)). Basta que las expresiones *sean* instancias de un predicado autorreferencial — $\forall x>y \neg Tr(s(x))$ — y, por tanto, que también lo *mencionen*, para que la lista que conforman lo sea.

Algunos autores como T. Jongeling, T. Koetsier & E. Wattel (2002), H. Leitgeb (2005a), R. Urbaniak (2009), L. Picollo (2012) y T. Beringer & T. Schindler (201+) rechazan este criterio de Priest para la autorreferencia. En su lugar, proponen nociones más intuitivas, según las cuales una oración es autorreferencial si refiere a sí misma de alguna manera, ya

¹⁰ Esto es, una regla de inferencia infinitaria que, dada una fórmula $A(x)$ con x libre, permite derivar $\forall xA(x)$ a partir de todas sus instancias numéricas $A(n)$ para cada $n \in \omega$.

¹¹ Para más detalles véase H. Leitgeb (2001).

¹² Para una discusión específica sobre este punto, véase S. Bringsjord & B. van Heuveln (2003).

¹³ Para una exposición detallada de la lógica de segundo orden véase S. Shapiro (1991, cap. 4).

¹⁴ Para más detalles sobre este punto véase L. Picollo (2013).

sea directa o indirectamente. Y si ninguna de las expresiones que conforman la lista de Yablo es autorreferencial, no hay razones para pensar que la lista lo es.¹⁵ Otros adhieren al criterio de Priest y emprenden la búsqueda de una secuencia alternativa cuyas oraciones no sean instancias de un predicado autorreferencial. En cualquier caso, es innegable que, contrario a lo que quería S. Yablo (1993), en la lista hay algún tipo de autorreferencia involucrada. La cuestión de fondo, no resuelta aún, es si este tipo de circularidad es la *causa* de la paradojicidad u ω -paradojicidad de la secuencia.

El primero en dar con una formulación alternativa de la lista compuesta por expresiones que no son instancias de un predicado circular fue quizás T. Forster (2004), sin proponérselo. Forster formaliza la secuencia en el fragmento proposicional del lenguaje infinitario $L_{\omega 1 \omega 1}$ del siguiente modo:

$$\bigwedge_{n \in \omega} (p_n \equiv \bigwedge_{m > n} \neg p_m)$$

donde $\bigwedge_{n \in \omega}$ es una conjunción infinitaria y p_n son variables proposicionales. Al no haber predicados, no hay autorreferencia siquiera en el sentido de Priest. Sin embargo, el mismo Forster rechaza este ejemplo por evitar el uso del predicado veritativo en la versión original.¹⁶

R. Sorensen (1998), en cambio, busca listas *yablescas* alternativas en el mismo L_T . Nos pide que consideremos primeramente una secuencia $R_0, R_1, R_2, \dots$ en la cual las oraciones impares, las ‘trabajadoras’, dicen de sus sucesoras impares que no son verdaderas, mientras que las restantes, ‘relleno’, son instancias arbitrarias de $\underline{n} = \underline{n}$, con $n \in \omega$. En esta lista no todas las oraciones son instancias de un mismo predicado autorreferencial. Aún más, no hay descripción posible para esta secuencia. Ahora bien, ¿cómo hacen referencia las trabajadoras a infinitas expresiones en lenguajes finitarios como L_T ? Del mismo modo que las oraciones de Yablo, mediante un cuantificador universal. Cada R_n en donde n es impar denota la oración ‘Para todo impar $x > n$, R_x no es verdadera’. En términos formales, recurrimos a una función $r(x)$ tal que, para todo $n \in \omega$ que sea impar, $r(\underline{n}) = \langle \forall x > \underline{n} (\exists y x = \underline{2y+1} \supset \neg Tr(r(x))) \rangle$. Ahora *algunas* (pero no *todas*) las expresiones de la lista son instancias de un predicado autorreferencial: las trabajadoras. Aquí parece estar presente la misma circularidad que en la lista original. De ser el caso, el criterio de Priest debería reformularse de algún modo, por ejemplo: “basta que algunas oraciones sean instancias de un predicado circular para que la lista lo sea”.

¹⁵ H. Leitgeb (2002) fue el primero en advertir la diversidad de nociones en juego en el debate sobre la autorreferencia de la lista de Yablo. Además, señaló serios obstáculos que toda noción de autorreferencia debe sortear. No es claro que ninguna de las definiciones hasta ahora propuestas, incluyendo la de Priest, sea enteramente satisfactoria para responder la pregunta por la circularidad de la lista de Yablo y poner fin a la discusión.

¹⁶ H. Leitgeb (2005b) da una versión similar de la secuencia de Yablo.

R. Sorensen (1998) da un segundo ejemplo en el que *prima facie ninguna* oración es instancia de un predicado autorreferencial. Sea $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ una secuencia de oraciones en todo como la anterior excepto que las trabajadoras no están en lugares impares sino distribuías arbitrariamente, de modo tal que el conjunto I de los índices de las trabajadoras no es describible. Las trabajadoras no pueden hacer referencia a las otras trabajadoras que le siguen en la secuencia por medio de sus índices, sino que deben encontrar otro modo. Sorensen no da más detalles al respecto. H. Leitgeb (2002), sin embargo, ofrece una versión formal de la lista de Yablo en la que cada oración refiere a las que se encuentran debajo mediante predicados cuya extensión está dada precisamente por aquellas:

$$\forall x(F_0(x) \supset \neg Tr(x))$$

$$\forall x(F_1(x) \supset \neg Tr(x))$$

$$\forall x(F_2(x) \supset \neg Tr(x))$$

...

Para obtener esta lista, primero expandimos el lenguaje con una secuencia infinita de predicados monádicos $F_0, F_1, F_2, \dots$, luego formulamos las oraciones y finalmente estipulamos las extensiones de los nuevos predicados de modo tal que F_n reciba el conjunto de códigos de las oraciones por debajo de la n -ésima oración como su interpretación. Ya no es necesario asignar nombres a estas oraciones (como $s(n)$ con $n \in \omega$ en la lista original), pues cada una refiere a otras ya no mediante sus nombres sino cuantificando directamente sobre ellas. Si bien no hay oraciones relleno y, por ende, el conjunto de ordinales que contienen trabajadoras —simplemente ω — es describible, recurrir a predicados de este modo para formular una lista yablesca es suficiente para que ninguna de las expresiones que la conforman sea una instancia de un predicado autorreferencial. Pues realmente no hay aquí ningún predicado, ninguna de las oraciones de la lista contiene término cerrado alguno. Naturalmente, este patrón de referencia no se obtiene en la aritmética sino que es preciso postularlo. Tendremos una ω -inconsistencia o una inconsistencia a secas (si empleamos la regla ω o trabajamos en lenguajes de segundo orden con semántica estándar) en tanto y en cuanto razonemos bajo la hipótesis de que este patrón es verdadero.

R. Cook (2006), quien adhiere explícitamente al criterio de Priest, propone otra versión de la secuencia en un lenguaje infinitario L_P cuyo vocabulario está dado por un conjunto numerable de nombres de oración SN , un predicado Tr para la verdad, $\neg$, $\wedge$ y $\perp$. Si $a \in SN$, $Tr(a)$ y $\neg Tr(a)$ son fórmulas de L_P . Si $P \subseteq \omega$ y, para cada $n \in P$, A_n es una fórmula de la forma $Tr(a)$ ó $\neg Tr(a)$ para algún $a \in SN$, $\bigwedge_{n \in P} A_n$ es una fórmula de L_P . Las reglas para las conectivas son las usuales, excepto que la conjunción puede ser infinitaria, al igual que su correspondiente regla de introducción. Dada una función de denotación δ que asigna fórmulas de L_P a cada elemento a de SN , las reglas de introducción y eliminación del predicado de verdad están dadas por:

(T-Intro) $\delta(a) \vdash Tr(a)$

(T-Elim) $Tr(a) \vdash \delta(a)$

Si $s_0, s_1, s_2, \dots \in SN$, para obtener una lista yablesca precisamos una función de denotación δ_Y tal que, para cada $n \in \omega$, $\delta_Y(s_n) = \bigwedge_{n \in \omega > n} \neg Tr(s_n)$. Aquí tampoco hay predicado alguno, los cuantificadores universales han sido reemplazado por conjunciones infinitas. Los subíndices en cada s_n no encubren una variable libre sino una enumeración de miembros de SN . En efecto, esos nombres no son creados junto con la lista sino que están disponibles previamente a cualquier función de denotación. La especificación de la secuencia no es sólo no circular sino bien fundada. Y es posible obtener una contradicción como la que obtuvimos §2 pero en un número infinito de pasos. Sin embargo, el uso de reglas infinitarias no es esencial. Cook también ofrece una semántica para este lenguaje, bajo la cual no es posible asignar valores de verdad consistentemente a las oraciones que conforman la secuencia de Yablo. Al igual que en el ejemplo de H. Leitgeb (2002), la paradojicidad de esta versión de la lista de Yablo depende de la aceptación de un patrón de referencia dado, en este caso, por δ_Y . No obstante, todo patrón de referencia parece ser legítimo, siendo que la asignación de signos a objetos como sus nombres, ya sean predicados a conjuntos o nombres de oraciones a oraciones, es siempre arbitraria.¹⁷

§ 6. Unwindings y otras paradojas infinitarias

Para finalizar, mencionamos una cuestión en alguna medida secundaria que ha formado parte de la literatura alrededor de la paradoja de Yablo. Fue tematizada originalmente por R. Sorensen (1998, p. 150), quien conjetura que la técnica de Yablo para ‘desenrollar’ —como lo llama R. Cook (2004)—¹⁸ el mentiroso obteniendo una versión infinitaria como es la lista de Yablo podría aplicarse a cualquier paradoja autorreferencial. Sorensen ofrece versiones infinitarias la paradoja de Prior y la paradoja de la validez de Pseudo Escoto. Asimismo, G. Uzquiano (2004) presenta una versión infinitaria de la paradoja de la denotación de Berry y S. Yablo (2004) una de la paradoja de conjuntos infundados de Mirimanoff.¹⁹ R. Cook (2004, en prensa) ha desarrollado métodos para desenrollar paradojas autorreferenciales expresables en L_P y en extensiones de L . Si alguno de estos lenguajes es capaz de sortear la autorreferencia —lo cual como hemos visto es plausible bajo diferentes modos de entender el término ‘autorreferencial’—, habremos avanzado un paso hacia la conjetura de Sorensen y la tesis original de Yablo sería verdadera: la autorreferencia no es la (única) raíz de las paradojas.

¹⁷ Para una discusión véanse S. Yablo (2004, p. 142), P. Teijeiro (2012) y R. Cook (2012, §3).

¹⁸ En inglés, *unwind*.

¹⁹ Estas paradojas son introducidas por A. Prior (1961), S. Read (1979), B. Russell & N. Whitehead (1910, p. 61) y D. Mirimanoff (1917), respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

- Beringer, T. & Schindler, T. (inédito): "Reference-graphs, Truth-games and Paradox".
- Bringsjord, S. & van Heuveln, B. (2003): "The 'mental eye' defence of an infinitized version of Yablo's paradox", *Analysis*, 63, 1, pp. 61-70.
- Cook, R. (2004): "Patterns of Paradox", *Journal of Symbolic Logic*, 69, 3, pp. 767-774.
- Cook, R. (2006): "There Are Non-circular Paradoxes (But Yablo's Isn't One of Them!)", *The Monist*, 89, 1, pp. 118-149.
- Cook, R. (2012): "Response to my Critics", *Análisis Filosófico*, 32, 1, pp. 69-97.
- Cook, R. (2014): *The Yablo Paradox. An Essay on Circularity*, Oxford University Press, Oxford.
- Forster, T. (2004): "The Significance of Yablo's paradox without self-reference", *Logique et Analyse*, 47, 185-188, pp. 461-462.
- Hardy, J. (1995): "Is Yablo's Paradox Liar-Like?", *Analysis*, 55, 3, pp. 197-198.
- Jongeling, T.B, Koetsier T. & Wattel, E. (2002): "Self-reference in Finite and Infinite Paradoxes", *Logique et Analyse*, 45, 177-178, pp. 15-30.
- Ketland, J. (2004): "Bueno and Colyvan on Yablo's paradox", *Analysis*, 64, 2, pp. 166-172.
- Ketland, J. (2005): "Yablo's paradox and ω -inconsistency", *Synthese*, 145, 3, pp. 295-302.
- Kripke, S. (1975): "Outline of a Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72, 19, pp. 690-716.
- Leitgeb, H. (2001): "Theories of Truth which have no Standard Models", *Studia Logica*, 68, 1, pp. 69-87.
- Leitgeb, H. (2002): "What is a Self-Referential Sentence? Critical Remarks on the Alleged (Non-) Circularity of Yablo's Paradox", *Logique et Analyse*, 45, 177-178, pp. 3-14.
- Leitgeb, H. (2005a): "What Truth Depends On", *Journal of Philosophical Logic*, 34, 2, pp. 155-192.
- Leitgeb, H. (2005b): "Paradox by (non-wellfounded) definition", *Analysis*, 65, 4, pp. 275-278.
- Mirimanoff, D. (1917): "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamentale de la théorie des ensembles", *L'Enseignement Mathématique*, 19, 1, pp. 37-52.
- Piccolo, L. (2012): "The Old-Fashioned Yablo Paradox", *Análisis Filosófico*, 32, 1, pp. 21-29.
- Piccolo, L. (2013): "Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatisfiability", *Studia Logica*, 101, 3, pp. 601-617.
- Priest, G. (1997): "Yablo's paradox", *Analysis*, 57, 4, pp. 236-242.
- Prior, A. (1961): "On a Family of Paradoxes", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2, 1, pp. 16-32.
- Read, S. (1979): "Self-reference and Validity", *Synthese*, 42, 2, pp. 265-274.
- Russell, B. & Whitehead, A. N. (1927): *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, segunda edición.
- Shapiro, S. (1991): *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*, Oxford University Press, Oxford.

- Sorensen, R. (1998): "Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars", *Mind*, 107, 425, pp. 137-155.
- Tarski, A. (1944): "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", *Philosophy and Phenomenological Research*, 4, 3, pp. 341–376.
- Teijeiro, P. (2012): "Circularity is Still Scary", *Análisis Filosófico*, 32, 1, pp. 31-35.
- Urbaniak, R. (2009): "Leitgeb, "About", Yablo", *Logique et Analyse*, 52, 207, pp. 239-254.
- Uzquiano, G. (2004): "An infinitary paradox of denotation", *Analysis*, 64, 2, pp. 128-131.
- Yablo, S. (1985): "Truth and Reflexion", *Journal of Philosophical Logic*, 14, 3, pp. 297-349.
- Yablo, S. (1993): "Paradox without Self-Reference", *Analysis*, 53, 4, pp. 251-252.
- Yablo, S. (2004): "Circularity and Paradox", en Bolander, T. Hendricks, V. F. & Pedersen S. A. (eds.), *Self-Reference*, CSLI Publications, Stanford.